Sayılar Teorisi I Bütünleme Soruları

1- a) $28x \equiv 15 \pmod{107}$ kongrüansının çözümünü bulunuz.

b) 82^{8285} sayısının 51 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.

2- $g=5$ modülo 23 primitif kök olduğuna göre $13x^{13} \equiv 5 \pmod{23}$ kongrüansını buna göre çözünüz.

3- a) 14 tane pozitif böleni olan en küçük pozitif tam sayıyı bulunuz

b) $p>2$ asal olmak üzere $n=4p$ şeklindeki sayı için $\sigma(n)=2n$ ise (mükemmel sayı ise) p asalını bulunuz.

4- a) $f(x)=x^3+x+57 \equiv 0 \pmod{125}$ polinom kongrüansının çözümünü bulunuz.

b) $\left(\frac{35}{107}\right)=?$

5- a) $\sqrt{8}$ sayısını sürekli kesre açınız

b) $x=[2,\overline{1114}]$ ise $x=?$

1- a) $28x \equiv 15 \pmod{107}$, $28x-107y=15$

$107 = 3.28+23$

$28 = 1.23+5$

$23 = 4.5+2$

$3 = 1.2+1$

$1 = 11.107 - 42.28$

$15 = (15.11).107 - (15.42).28$

$x = \overline{12}$ bulunur.

1- b) $82^{8285} \equiv x \pmod{51}$

$31^{8285} \equiv x \pmod{51}$ $\qquad \varphi(51)=32 \qquad (31,51)=1$

$31^{32} \equiv 1 \pmod{51} \qquad 31^{8285} \equiv \left(31^{32}\right)^{258} \cdot 31^{29} \equiv x \pmod{51}$

$31^{3} \cdot 31^{29} \equiv 1 \equiv 31^{3} x \pmod{51} \qquad 1 \equiv 7x \pmod{51}$

$7x \equiv 1 \pmod{51} \Rightarrow x = \overline{22}$ bulunur.

2-) $13x^{13} \equiv 5 \pmod{23} \qquad \operatorname{ind} 13 + 13 \operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} 5 \pmod{22}$

$13 \operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} 5 - \operatorname{ind} 13 \pmod{22}$

$13 \operatorname{ind} x \equiv (1-14) \pmod{22} \Rightarrow 13 \operatorname{ind} x \equiv -13 \pmod{22}$

$\operatorname{ind} x \equiv (-1) \pmod{22} \qquad \operatorname{ind} x = 21$

$x = 5^{21} \pmod{23} \qquad x = \overline{14}$

3- a) $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \qquad s(n) = (1+\alpha_1) \cdots (1+\alpha_k)$

$14 = 2.7 = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \qquad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 6 \qquad n = 192$

b) $p > 2 \qquad n = 4p \qquad \sigma(4p) = 8p$

$\sigma(4)\sigma(p) = 8p \qquad (1+2+4)(p+1) = 8p$

$7p + 7 = 8p \qquad p = 7$ //

Scanned with CamScanner

4- a) $x^3+x+57\equiv 0\ (5^3)$

$x^3+x+57\equiv 0\ (5)$

$b_1=4$ $\quad f(4)=125$, $f'(4)=49\not\equiv 0$

$49k\equiv \frac{-125}{5}\ (5) \Rightarrow k\equiv 0\ (5)$ $\quad x=4\ (25)$

$f(4)=125$ $\quad f'(4)=49\not\equiv 0$

$49k\equiv \frac{125}{25}\ (5)$ $\quad k\equiv 0\ (5)$

$x=4+0.25\equiv 4\ (125)$ $\quad x=\overline{4}$

b.) $\left(\frac{35}{107}\right)=\left(\frac{5}{107}\right)\left(\frac{7}{107}\right)=(-1)(-1)=1$

$\left(\frac{5}{107}\right)\cdot\left(\frac{107}{5}\right)=1$ $\quad \left(\frac{107}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=-1$

$\left(\frac{5}{107}\right)=-1$ // $\quad \left(\frac{7}{107}\right)\left(\frac{107}{7}\right)=-1$

$\left(\frac{107}{7}\right)=\left(\frac{2}{7}\right)=1$ $\quad \left(\frac{7}{107}\right)=-1$

5) a) $\sqrt{8}=2+\frac{1}{x_1}$ $\quad x_1=\frac{\sqrt{8}+2}{4}$

$\frac{\sqrt{8}+2}{4}=1+\frac{1}{x_2}$ $\quad x_2=\sqrt{8}+2$

$\sqrt{8}+2=4+\frac{1}{x_3}$ $\quad x_3=\frac{\sqrt{8}+2}{4}=x_1$ $\quad \sqrt{8}=[2,\overline{1,4}]$ //

b) $x=[2,\overline{1114}]=\sqrt{7}$ //